8.1 反常积分的概念与计算

2024年1月2日 星期二 10:01

定义：设f是定义在$[a,+\infty)$上的一个函数，且$\forall u>a$，f在$[a,u]$上可积，假设极限$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$存在且有限，则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛，而且把该极限定义为无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$的值，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,dx \quad (1)$$

不然，就称$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$发散

同理，可定义

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,dx \quad (2)$$

由(1)(2)定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad (3)$$

其中a是任意取定的实数. 当且仅当$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$与$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$均收敛称(3)式左端的无穷积分收敛，(3)式定义的前提：$\forall[u,v]\subset\mathbb{R}$，都有$f$在$[u,v]$上可积

性质：设f是定义在$[a,+\infty)$上的一个函数，

且$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛，则$\forall b>a$，有$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$收敛

且$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_b^{+\infty} f(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx$

肯定可积（由定义）

证：任取$u>b$，有

$$\int_b^u f(x)\,dx=\int_a^u f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

从而

$$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{u\to+\infty}\int_b^u f(x)\,dx$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[\int_a^u f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

性质：在(3)式，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$的收敛性以及具体的取值与$a$的选取无关

若$\exists a\in\mathbb{R}$，使(3)式右端的两个无穷积分都收敛，现在$\forall b\in\mathbb{R}$，有

$\int_{-\infty}^b f(x)dx$与$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$均收敛

注：一般情况下，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\neq\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)\,dx \quad (5)$$

特别地，不能由(5)式右端的极限存在，得出(5)式左端的无穷积分收敛

例：$f(x)=x$ $\lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}f(x)\,dx=0$，收敛，但 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ 并不收敛

除非 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则上述等号成立

例：讨论无穷积分 $\int_1^{\infty}x^p\,dx$ 的收敛性

解：$\forall u>1$，$\int_1^u x^p\,dx=\begin{cases}\frac{1}{p+1}(u^{p+1}-1), & p\neq -1\\ \ln u, & p=-1\end{cases}$

由于 $\lim_{u\to\infty}\ln u=+\infty$，当 $p=-1$ 时，$\int_1^u x^p\,dx$ 发散

当 $p>-1$ 时，$p+1>0$，$\lim_{u\to+\infty}u^{p+1}=+\infty$ $\int_1^u x^p\,dx$ 发散

当 $p<-1$ 时 $p+1<0$，$\lim_{u\to+\infty}u^{p+1}=0$ $\int_1^u x^p\,dx$ 收敛

例：讨论下列无穷积分的敛散性

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

解：(1) 原式 $=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$\xlongequal{令t=\ln x}\int_{\ln 2}^{+\infty}t^{-p}\,dt$ $\begin{cases}在 p>1 时收敛\\ 在 p\leq 1 时发散\end{cases}$

(2) $\left.\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\\ &\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}=\pi$

无穷积分的性质

设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$\forall u>a$，f 在 $[a,u]$ 上可积

令 $F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$

则 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛 $\xLeftrightarrow{由定义}$ $\lim_{u\to+\infty}F(u)$ 存在

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists G>a$，使 $u_2>u_1>G$ 时，有

$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$ （柯西收敛准则）

线性性 设 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ 都收敛，则 $\forall k_1,k_2\in R$

有 $\int_a^{+\infty}(k_1f(x)+k_2g(x))\,dx$ 收敛，并且

$\int_a^{+\infty}(k_1f(x)+k_2g(x))\,dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)\,dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$

性质：设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$\forall u>a$，f 在 $[a,u]$ 上可积

则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 收敛 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛

且 $\left|\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$

证：$\forall \varepsilon>0$，由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，$\exists G>a$，使当 $u_2>u_1>G$ 时，有

$$\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon$$

由 $\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\leq\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon$，所以当 $u_2>u_1>G$ 时，

有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$

从而由柯西收敛准则，得到 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

$\forall u>a$，有

$$-\int_a^u|f(x)|dx\leq\int_a^u f(x)dx\leq\int_a^u|f(x)|dx$$

令 $u\to+\infty$，可得.

条件收敛．若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，

则称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛

绝对收敛 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛

（前提：$\forall u>a$，f 在 $[a,u]$ 上可积）

8.2 反常积分的收敛判别法

2024年1月2日 星期二 11:15

比较判别法

设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数，f和g都在任何区间$[a,u]$上可积，且 $f(x)\le g(x)$，$x\in[a,+\infty)$，则当$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，必定有$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛

当$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散，必定有$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散.

例：讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 的敛散性

由于当$x\ge0$时 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}$

又 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 收敛

比较判别法的极限形式

设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数，f和g都在任何区间$[a,u]$上可积，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，则

(i) 当$0<c<+\infty$，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)$具有相同的敛散性

(ii) 当$c=0$时，由$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，可得$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛

(iii) 当$c=+\infty$时，由$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，可得$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散

柯西判别法1

设f是定义在$[a,+\infty)$上的函数，且$\forall u>a$，f在$[a,u]$上可积，则

(i) 当$x\in[a,+\infty)$时，有 $0\le f(x)\le\frac{1}{x^p}$ 且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(ii) 当$x\in[a,+\infty)$时，有 $f(x)\ge\frac{1}{x^p}$ 且 $p\le1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

柯西判别法2

设f是定义在$[a,+\infty)$上的函数，且$\forall u>a$，f在$[a,u]$上可积，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c$，则 (i) 当$p>1$，且$0\le c<+\infty$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛

(ii) 当 $p\le1$ 且 $0<c\le+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$ 无法判断

(而且此时不要求 $a>0$)

例：(1) $\int_1^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(x^{\alpha}e^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+2}}{e^x}=0$

可得收敛

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 发散

狄利克雷判别法

设 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上是有界函数. g 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

证: (利用积分第二中值定理)

由 $F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 可得 $\exists M>0$. 使

$$|F(u)|\le M,\quad \forall u\in[a,+\infty)$$

$\forall u_2>u_1>a$, 由积分第二中值定理, $\exists \xi\in[u_1,u_2]$

使 $\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx = g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx$

注意到 $\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| = |F(\xi)-F(u_1)| \le 2M$

$$\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right| = |F(u_2)-F(\xi)| \le 2M$$

所以 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| \le 2M(|g(u_1)|+|g(u_2)|)$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists G>a$, 使

当 $x>G$ 时, 有 $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$

从而当 $u_2>u_1>G$ 时. 有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right|<\varepsilon$

由柯西收敛准则, 可得定理成立

阿贝尔(Abel)判别法

设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

由 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 所以极限

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \text{ 存在, 记作 } C$$

$$f(x)\cdot g(x) = \underbrace{f(x)(g(x)-C)}_{\text{Dirichlet 判别法知收敛}} + \underbrace{C\cdot f(x)}_{\text{条件可知收敛}}$$

※ 这两种判别法不仅仅针对非负函数

例: 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ $(p>0)$ 的敛散性

解：① $p>1$，上式收敛

② $0<p\le 1$ 令 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{1}{x^p}$，$x\in[1,+\infty)$

则 g 在 $[1,+\infty)$ 单减且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

又 $F(u)=\int_1^u f(x)\,dx=|\cos 1-\cos u|\le 2$

所以由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}$ 收敛

考虑 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 在 $p\in(0,1]$ 上的敛散性.

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

注意到 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx \overset{令u=2x}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos u}{u}du$ 收敛

又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散，从而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|$ 发散.

故当 $0<p\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛